

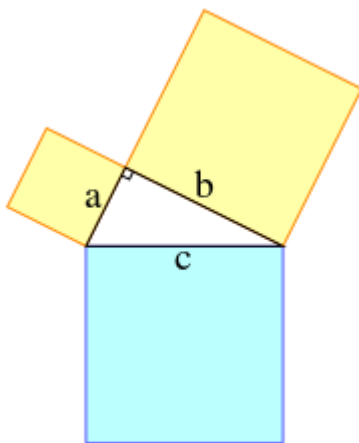
Números irracionales en la recta numérica

Hemos venido trabajando en clase las propiedades de la potenciación y radicación para adentrarnos en el tema de posicionar los números irracionales en la recta numérica; a cada número racional le corresponde un punto en la recta, pero en realidad éstos no completan la recta, también la constituyen los irracionales. En general, representar un número con infinitas cifras decimales no periódicas es imposible y por lo tanto nos tendríamos que conformar con una aproximación.

Sin embargo, con la ayuda del Teorema de Pitágoras no es difícil representar los números irracionales en la recta numérica, ayudándonos geoméricamente con las propiedades del triángulo.

Teorema de Pitágoras (Consultar videos en Youtube)

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de los cuadrados de las respectivas longitudes de los catetos. Es la proposición más conocida entre las que tienen nombre propio en la matemática.



Sea el triángulo rectángulo de catetos **a** y **b** e hipotenusa **c**. Se trata de demostrar que el área del cuadrado de lado **c** es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lado **a** y lado **b**. Es decir:

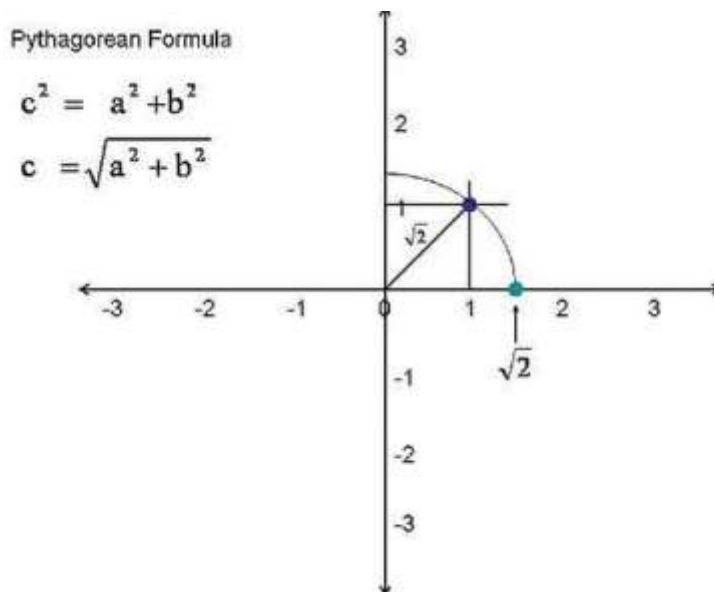
$$C^2 = a^2 + b^2$$

Demostraciones del Teorema.

El teorema de Pitágoras es de los que cuentan con un mayor número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos. Una de las causas de esto es que en la Edad Media se exigía una nueva demostración del teorema para alcanzar el grado de "Magíster matheseos". Debemos entender a partir de la demostración gráfica del Teorema de Pitágoras su composición Algebraica. Primero debemos mirar el siguiente video:

<https://www.youtube.com/watch?v=fUpXM3JHFq4&t=172s>

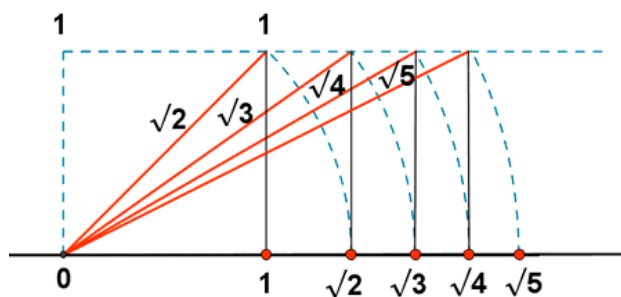
Ya sabemos que la hipotenusa siempre se expresa como un número irracional; muchos números irracionales, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etc., se pueden localizar en la recta numérica; Veamos cómo se puede representar, por ejemplo, $\sqrt{2}$:



En éste caso, los valores definidos para el eje de las x y el eje y respectivamente es 1; es decir, $a=1$ y $b=1$; entonces, según el teorema de Pitágoras, nos queda $c=\sqrt{a^2 + b^2}$, para lo cual simplificamos los radicales y nos da en x el punto en 1 y en y nos da 1, también.

Ver el siguiente video: <https://www.youtube.com/watch?v=uLO7I8ULrdU>

Observen como a partir del cálculo y la ubicación de $\sqrt{2}$ en la recta numérica, podemos calcular las otras hipotenusas:



Gráfica No. 2 (Cálculo de las raíces)

ACTIVIDAD PARA DESARROLLAR

Los estudiantes deben socializar en compañía de los padres y copiar el contenido de la presente guía en el cuaderno.

Los estudiantes deben realizar la maqueta de la demostración gráfica y algebraica del Teorema de Pitágoras. Deben grabar un video en casa desde el celular haciendo y presentando el resultado de la maqueta la cual va a ser socializada a los estudiantes de grado sexto como transferencia de conocimiento. (Enviar video al correo: mpineda.vanudista@gmail.com.)

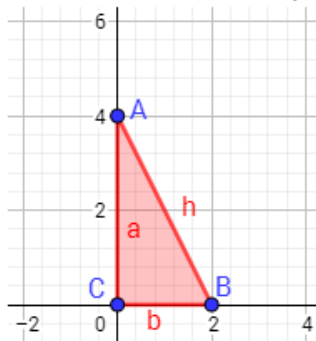
A partir del gráfico de las raíces de la Gráfica No. 2, los estudiantes deben expresar el valor de los catetos a y b para cada raíz representada en la recta numérica; recuerden que el punto y en todos los casos es de 1^2 ; es decir, tiene valor de 1 en y .

EJERCICIOS:

Los estudiantes deben realizar los siguientes ejercicios y enviarlos al correo mpineda.vanudista@gmail.com, los cuales serán sustentados cuando se normalicen las actividades de clase presenciales como evidencia del proceso de trabajo desescolarizado.

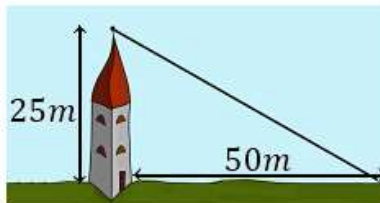
Ejercicio No. 1

En el siguiente triángulo, ¿cuál de los lados es la hipotenusa y cuál es el ángulo recto?



Calcular cuánto mide la hipotenusa. (exprésela en forma de número irracional)

Ejercicio No. 2



Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?

Ejercicio No. 3

Una parcela de terreno cuadrado dispone de un camino de longitud $2\sqrt{2}$ kilómetros (segmento discontinuo) que la atraviesa según se muestra en la siguiente imagen:



Calcular el área total de la parcela.

ANALICEMOS LA SOLUCIÓN

Observando la figura, el camino coincide con una de las diagonales del cuadrado, así que divide a éste en dos triángulos iguales. Además, los dos triángulos son rectángulos y los catetos miden lo mismo.

Si llamamos x a la medida de los catetos, aplicando Pitágoras,

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= (2\sqrt{2})^2 \\2x^2 &= 2^2 \cdot \sqrt{2}^2 \\2x^2 &= 4 \cdot 2 \\2x^2 &= 8\end{aligned}$$

Hemos usado que el cuadrado de un producto es el producto de los cuadrados.

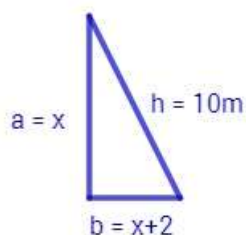
Para calcular x , pasamos el 2 dividiendo al otro lado de la igualdad y hacemos la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned}2x^2 &= 8 \\x^2 &= \frac{8}{2} \\x^2 &= 4 \\x &= \sqrt{4} \\x &= 2\end{aligned}$$

Por tanto, los cuatro lados de la parcela miden 2 kilómetros y, por consiguiente, su área es 4 kilómetros cuadrados.

EJERCICIO No. 4

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 metros y sus catetos miden x y $x + 2$:



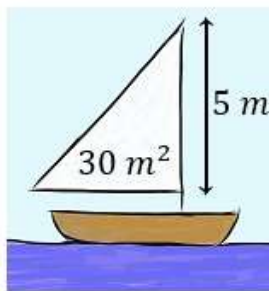
¿Cuánto miden los catetos?

EJERCICIO 4.1.

Calcular cuánto mide el cateto b de un triángulo rectángulo si su otro cateto, a , y su hipotenusa, h , miden

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{2}m \quad h = \frac{\sqrt{194}}{6}m$$

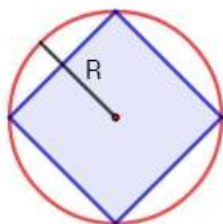
EJERCICIO 4.2.



Hallar las medidas de los lados de una vela con forma de triángulo rectángulo si se quiere que tenga un área de 30 metros al cuadrado y que uno de sus catetos mida 5 metros para que se pueda colocar en el mástil.

EJERCICIO No. 5.

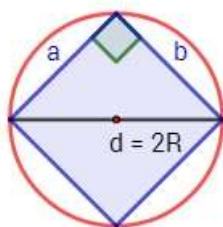
Se desea pintar un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio $R = 3\text{cm}$ como se muestra en la figura:



Calcular el área del cuadrado.

ANALICEMOS SU SOLUCIÓN

El radio mide $R = 3\text{cm}$. El diámetro ($d = 2R$) coincide con la diagonal del cuadrado y, por ende, divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales:



Como la figura es un cuadrado, los catetos a y b miden lo mismo, así que escribiremos simplemente a . La hipotenusa mide dos veces el radio: $h = 2 \cdot 3 = 6\text{cm}$.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular los lados del cuadrado:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$6^2 = a^2 + a^2$$

$$36 = 2a^2$$

$$a^2 = \frac{36}{2} = 18$$

No calculamos la raíz cuadrada ya que no necesitamos saber cuánto miden los lados del cuadrado.

El área de un cuadrado de lado a es a^2 . Por tanto, el área del cuadrado inscrito es 18 centímetros cuadrados.

RECUERDE: SI TIENE ALGUNA DUDA, FAVOR COMUNICARSE VÍA CORREO ELECTRÓNICO A:

mpineda.vanudista@gmail.com.