

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES EN LA RECTA NUMÉRICA

En este módulo se desarrollarán los siguientes temas:

1. Representación de números racionales en la recta numérica.
2. El opuesto de un número racional.
3. Subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Objetivos:

1. Representar números racionales en la recta numérica.
2. Determinar el opuesto de un número racional.
3. Determinar y reconocer los subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

Descripción de la actividad:

Este módulo se desarrollará partiendo del supuesto de que se posee como conocimiento previo la representación de números enteros en la recta numérica; de esta manera, se considera la representación de números racionales en la recta numérica como una "extensión" de la representación de los números enteros.

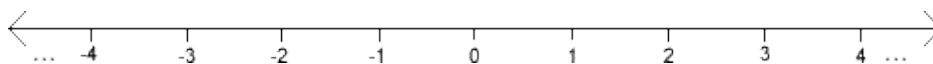
El concepto de opuesto de un número racional se abarca desde un punto de vista geométrico, partiendo de su representación en la recta numérica.

Finalmente el tema de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ se desarrollará a partir del concepto general de subconjunto, enfatizando en los casos particulares de mayor relevancia.

Recordemos que el conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$ y se define de la manera siguiente:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

Podemos representar los números enteros como puntos de una recta de la manera siguiente:



El segmento de recta comprendido entre dos números enteros consecutivos se llama "segmento unidad".

De manera similar, recordemos que el conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$ y se define de la manera siguiente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Debido a que si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ entonces se cumple que $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$; se

conviene en representar los números racionales preferentemente por medio de fracciones en las cuales el denominador es un número entero positivo.

Recordemos además que si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, el número racional $\frac{a}{b}$ se puede considerar como el cociente que se obtiene al dividir a por b ; en donde b indica el número de partes en que se divide la unidad y a el número de partes que se toman.

De esta manera, si se divide en dos partes iguales cada segmento unidad en la recta numérica, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 2, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Represente en la recta numérica los siguientes números racionales:

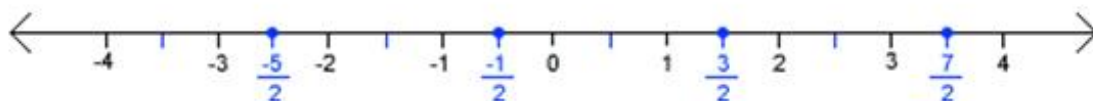
a. $\frac{3}{2}$

b. $\frac{7}{2}$

c. $\frac{-1}{2}$

d. $\frac{-5}{2}$

Solución:



De igual manera, si se dividen en tres partes iguales cada segmento unidad en la recta, podemos representar los números racionales cuya representación fraccionaria tiene como denominador 3, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Represente en la recta numérica los siguientes números racionales:

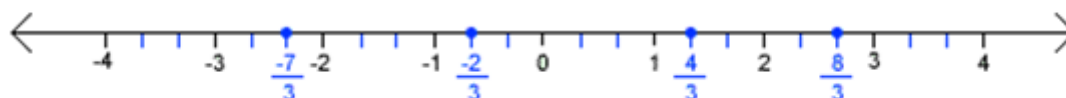
a. $\frac{4}{3}$

b. $\frac{8}{3}$

c. $\frac{-2}{3}$

d. $\frac{-7}{3}$

Solución:



Ejemplo

Represente en una recta numérica los siguientes números racionales.

a. $\frac{7}{9}$

b. $\frac{34}{15}$

c. $\frac{-9}{7}$

d. $\frac{-17}{5}$

Solución

Utilizando la calculadora se puede notar que:

De esta manera



ACTIVIDAD: Resuelva los siguientes Ejercicios:

1. Represente en una recta numérica los siguientes números racionales.

1.

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{8}{5}$

c. $\frac{-5}{2}$

d. $\frac{7}{4}$

2.

a. $\frac{9}{2}$

b. $\frac{-11}{3}$

c. $\frac{13}{5}$

d. $\frac{-7}{4}$

2. Utilice la calculadora para encontrar la expansión decimal de los siguientes números racionales y representelos en la recta numérica.

1.

a. $\frac{13}{7}$

b. $\frac{7}{15}$

c. $\frac{-65}{21}$

d. $\frac{-85}{13}$

2.

a. $\frac{16}{9}$

b. $\frac{77}{27}$

c. $\frac{-40}{29}$

d. $\frac{-134}{141}$

Opuesto de un Número Racional

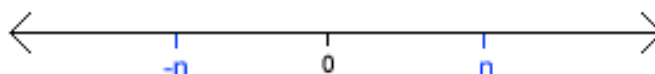
Para cada número racional n , existe otro número racional que llamaremos *opuesto de n* y lo denotaremos por $-n$.

Ejemplo:

1. El opuesto de $\frac{7}{3}$ es $-\frac{7}{3}$.
2. El opuesto de $\frac{11}{5}$ es $-\frac{11}{5}$.
3. El opuesto de $\frac{-19}{3}$ es $-\left(\frac{-19}{3}\right)$.
4. El opuesto de $\frac{-21}{4}$ es $-\left(\frac{-21}{4}\right)$.
5. El opuesto de $3,28$ es $-3,28$.
6. El opuesto de $-6,35$ es $-(-6,35)$.

Observación:

1. El número racional n y su opuesto $-n$ se representan en la recta numérica a la misma distancia de cero, en sentidos opuestos.



2. Si n es un número racional entonces se cumple que $-(-n) = n$

Así

$$-\left(\frac{-21}{4}\right) = \frac{21}{4} \quad \Bigg| \quad -\left(\frac{-19}{3}\right) = \frac{19}{3} \quad \Bigg| \quad -(-6,35) = 6,35$$

Nota:

Dada la última observación se deduce que un número racional y su opuesto tienen "signo contrario". Por ejemplo:

1. El opuesto de $\frac{1}{5}$ es $-\frac{1}{5}$. 2. El opuesto de $-\frac{17}{4}$ es $\frac{17}{4}$.
3. El opuesto de $4,15$ es $-4,15$. 4. El opuesto de $-8,21$ es $8,21$.

Ejercicio

Para cada uno de los siguientes números racionales, determine su opuesto y represente ambos números en la recta numérica.

a. $\frac{4}{3}$ b. $-\frac{13}{5}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $-\frac{7}{2}$ e. $8,345$ f. $-3,\overline{345}$

Subconjuntos de los números racionales

Recordemos que si A y B son conjuntos y si todo elemento de A es elemento de B , entonces se dice que A es subconjunto de B .

Notación

Si A y B son conjuntos y A es subconjunto de B se escribe $A \subset B$. Si A no es subconjunto de B se escribe $A \not\subset B$.

Si m es un elemento del conjunto A , se escribe $m \in A$. Si m no es un elemento del conjunto A se escribe $m \notin A$.

Ejemplo

Considere los conjuntos A y B definidos por:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}; \quad B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Como todo elemento de A es elemento de B entonces $A \subset B$.

Note además que $B \not\subset A$ ¿Por qué?

Por otra parte observe que $-1 \in A$, $0 \in A$, $2 \in A$, $3 \notin A$, $4 \notin A$.

Ejercicio

Dados los conjuntos:

$$A = \left\{-3, -\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}; \quad B = \left\{-5, -3, -\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 2, \frac{10}{3}\right\}$$

determine si los siguientes enunciados son verdaderos o Falsos.

a. $A \subset B$ (V)

b. $B \subset A$ (F)

c. $2 \in A$ (V)

d. $-\frac{3}{4} \in A$ (V)

e. $-\frac{3}{4} \in B$ (V)

f. $-5 \in A$ (F)

g. $-5 \in B$ (V)

h. $\frac{4}{3} \in B$ (F)

- Analiza las respuestas.

Algunos subconjuntos particulares de los números racionales

Note que el número natural 6 se puede representar como $\frac{6}{1}$, por lo tanto $6 \in \mathbb{Q}$.

En forma similar, el número natural 29 se puede representar como $\frac{29}{1}$, por lo tanto $29 \in \mathbb{Q}$.

En general, si $n \in \mathbb{N}$, n se puede representar como $\frac{n}{1}$, por lo tanto todo número natural es racional, es decir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

De igual manera, el número -17 se puede representar como $\frac{-17}{1}$, por lo tanto,

$-17 \in \mathbb{Q}$. En general, si $x \in \mathbb{Z}$, entonces se puede representar como $\frac{x}{1}$, por lo tanto, todo número entero es racional, es decir, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Definición

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, se dice que el número racional $\frac{a}{b}$ es positivo si y sólo si a y b son ambos positivos o ambos negativos.

Al conjunto cuyos elementos son los números racionales positivos se le denota $\mathbb{Q}^+$. Note que $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$.

Definición

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, se dice que el número racional $\frac{a}{b}$ es negativo si y sólo si entre los números enteros a y b , uno de ellos es positivo y el otro es negativo.

Definición

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, se dice que el número racional $\frac{a}{b}$ es negativo si y sólo si entre los números enteros a y b , uno de ellos es positivo y el otro es negativo.

Al conjunto cuyos elementos son los números racionales negativos se le denota $\mathbb{Q}^-$. Note que $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$.

Observación

Los números racionales positivos se representan en la recta numérica a la derecha de cero y los números racionales negativos se representan a la izquierda de cero.

Ejemplo

1. Son números racionales positivos los siguientes:

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{7}{5}$

c. $\frac{-9}{-4}$

d. $\frac{-3}{-2}$

2. Son números racionales negativos los siguientes:

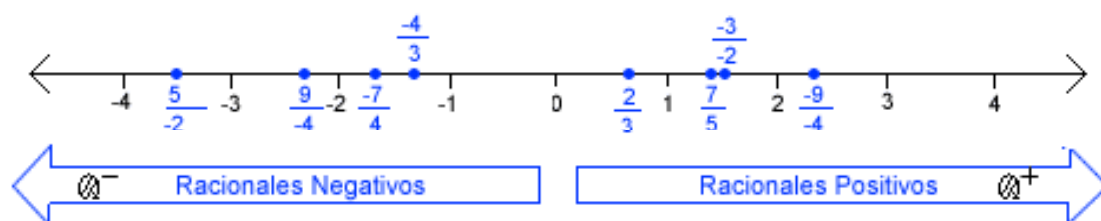
a. $\frac{-7}{4}$

b. $\frac{5}{-2}$

c. $\frac{-4}{3}$

d. $\frac{9}{-4}$

Si se representan gráficamente estos números se tiene



Observación $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$

Ejercicios

1. Escriba tres números que pertenezcan a cada uno de los conjuntos siguientes

a. $\mathbb{N}$

b. $\mathbb{Z}^-$

c. $\mathbb{Z}$

d. $\mathbb{Q}^+$

e. $\mathbb{Q}^-$

f. $\mathbb{Q}$

2. De acuerdo con la teoría y los diagramas vistos en la presente guía, determine si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.

a. $-1 \in \mathbb{N}$

b. $-1 \in \mathbb{Z}$

c. $-1 \in \mathbb{Q}$

d. $\frac{1}{4} \in \mathbb{N}$

e. $\frac{1}{4} \in \mathbb{Z}$

f. $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$

g. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

h. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$

i. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

j. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

k. $\mathbb{Z}^- \subset \mathbb{Q}$

l. $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Z}$

m. $\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$

n. $\mathbb{Q}^- \cap \{0\} \cap \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$

o. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

p. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

q. $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Q}^+ = \emptyset$

ACTIVIDADES DE LA GUÍA

- Los estudiantes deben copiar la guía en el cuaderno, investigando los términos desconocidos.
- Deben entregar en una hoja de examen cuadriculada, los ejercicios y actividades propuestas.
- Hacer una maqueta para explicar a los niños de primaria el concepto de la recta numérica, mediante una actividad lúdica que deben consultar por internet.
- Se evaluará de manera individual al retorno de las clases presenciales mediante sustentación en el tablero.

Cualquier inquietud, en el correo:

mpineda.vanudista@gmail.com